

RASTREAMENTO EM SISTEMAS DISCRETOS COM REJEIÇÃO DE DISTÚRBIOS USANDO CONTROLE ÓTIMO \mathcal{H}_∞ COM MODIFICAÇÃO DE ZEROS

RENATO DE AGUIAR TEIXEIRA MENDES*, EDVALDO ASSUNÇÃO*, CRISTIANO QUEVEDO ANDREA*, MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA*

**Unesp - Universidade Estadual Paulista,
Departamento de Engenharia Elétrica,
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira,
15385-000, Ilha Solteira, São Paulo, Brasil*

Emails: renatoatm@aluno.feis.unesp.br, edvaldo@dee.feis.unesp.br, quevedo_unesp@yahoo.com.br, marcelo@dee.feis.unesp.br

Abstract— The tracking system problem in discrete time systems, with the presence of a disturbance signal in the plant, is solved using a zero variation methodology proposed in this work. The design is formulated in Linear Matrix Inequalities (LMI) framework, such that the optimal solution of stated control problem is obtained. A numerical example is illustrated to show the proposed methodology viability.

Keywords— Zeros Placement, Control Systems, Tracking, Discrete Systems, LMIs.

Resumo— Neste estudo é proposta uma metodologia de alocação de zeros para solucionar o problema do rastreamento do sinal de referência em sistemas discretos considerando-se uma entrada de perturbação na planta. A formulação do projeto é descrita na forma de Inequações Matriciais Lineares, pois estas permitem a descrição de problemas de otimização convexa.

Keywords— Modificação dos Zeros, Sistemas de Controle Discretos, Rastreamento, LMIs.

1 Introdução

Pode-se encontrar apenas uma pequena quantidade de textos que abordam o assunto alocação de zeros em sistemas de controle discreto. Em (De la Sen, 1996) a alocação de pólos de malha fechada em sistemas discretos é alcançada a partir de uma técnica de projeto de controle que faz uso das taxas de amostragem para componentes de estado, entrada e saída. Ainda, em (Saberri et al., 1997) a alocação de pólos discretos em sistemas de controle é realizada em uma região do plano Z especificada em projeto preservando a otimalidade do controlador \mathcal{H}_2 de realimentação. Dentre os poucos textos que abordam alocação de zeros em sistemas discretos tem-se (M'Saad et al., 1985), onde os zeros arbitrários são alocados para o projeto de controladores adaptativos discretos. Também, em (Messner and Kempf, 1996) são alocados zeros na dinâmica de um compensador para se manter uma classe de dinâmicas não modeladas mediante o cancelamento de todas as harmônicas de um distúrbio periódico acima da frequência de Nyquist formando o projeto de controladores repetitivos discretos.

Em (Andrea et al., 2004) é proposta uma metodologia de modificação de zeros para resolver o problema do rastreamento de sinal de controle em sistemas contínuos considerando-se ainda a existência de um sinal de entrada exógena de perturbação ou ruído na planta.

Neste trabalho, descreve-se a formulação da otimização do problema de rastreamento e rejeição de ruído na forma de Inequações Matriciais Lineares - LMIs (do Inglês, Linear Matrix Inequalities), representando uma formulação convexa do problema. Em (Oliveira, 1999) é possível verificar o uso desta ferramenta em sistemas discretos para o estudo de esta-

bilidade, filtros e controladores. O equacionamento do método proposto é simples em comparação a outras técnicas de rastreamento tendo como principal resultado a solução ótima do problema com baixo custo computacional devido ao uso de algoritmos de programação linear de convergência polinomial para a solução das LMIs com o uso do software MATLAB.

2 Formulação da estrutura do rastreador de sinais

Considera-se o seguinte sistema discreto linear, invariante no tempo, estabilizável e observável descrito na forma de variáveis de estado:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + B_u u(k) + B_w w(k) \\ y(k) &= Cx(k), \quad x(0) = 0\end{aligned}\quad (1)$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_u \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $B_w \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $x(k)$ é o vetor de estados, $y(k)$ é a saída, $u(k)$ é a entrada de controle e $w(k)$ uma entrada exógena (distúrbio).

Considera-se a estrutura ilustrada na Figura 1 para o problema de controle ótimo visando a rejeição do sinal de perturbação e rastreamento do sinal de controle em sistemas discretos. A variável T representa o período de amostragem adotado.

Primeiramente projeta-se um compensador \mathcal{H}_∞ através de um controlador discreto K, segundo a lei de controle $u(k) = -Kx(k)$. Tal controlador é formulado em termos de LMIs e minimiza a norma \mathcal{H}_∞ de $w(k)$ para $y(k)$ conforme é mostrado na Figura 2.

Na etapa seguinte, projeta-se um estimador discreto de Kalman (Franklin et al., 1990) (Van Loan,

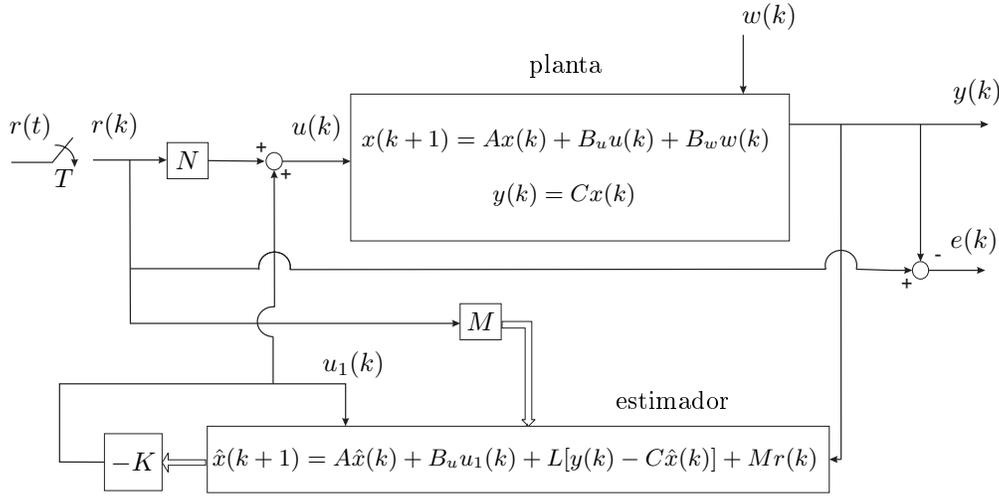


Figure 1: Sistema de controle ótimo discreto no tempo com posicionamento de pólos e zeros.

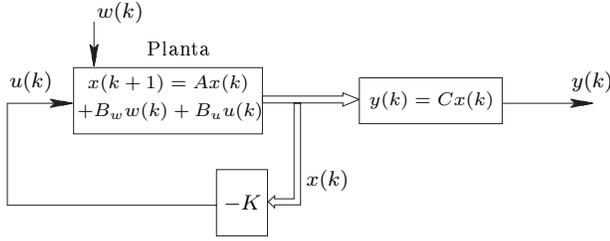


Figure 2: Sistema com realimentação de estados: K é um compensador \mathcal{H}_∞ .

1970) com o uso do software MATLAB (Gahinet et al., 1995) para reconstruir os estados e depois obtém-se o ganho N e o vetor M , indicados na Figura 1, através de um processo de otimização descrito na forma de LMIs. N e M modificam as posições dos zeros de $r(k)$ para $u(k)$ de forma a otimizar a norma \mathcal{H}_∞ entre a saída $e(k)$ e a entrada de controle $r(k)$.

O diagrama de blocos da Figura 1 pode ser descrito através das variáveis de estado $x(k+1)$ e $\hat{x}(k+1)$, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(k+1) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_u N \\ M \end{bmatrix} r(k) \\ &\quad + \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} w(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} \\ e(k) &= r(k) - y(k) = r(k) - \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

sendo:

$$\begin{aligned} A_1 &= A \\ A_2 &= -B_u K \\ A_3 &= LC \\ A_4 &= A - B_u K - LC \end{aligned}$$

O sistema (2) pode ser representado na forma compacta,

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= A_m \bar{x}(k) + B_m r(k) + B_w w(k) \\ e(k) &= -C_m \bar{x}(k) + D_m r(k) \\ y(k) &= C_m \bar{x}(k) \end{aligned} \quad (3)$$

sendo,

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix}, A_m = \begin{bmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, D_m = 1, \quad (4)$$

$$B_m = \begin{bmatrix} B_u N \\ M \end{bmatrix}, B_n = \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } C_m = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Aplicando-se a Transformada Z no sistema (3), para $\bar{x}(0)=0$, e realizando-se algumas manipulações algébricas, pode-se determinar a relação entre a saída $Y(z)$ e as entradas $W(z)$ e $R(z)$, conforme descrito em (6):

$$Y(z) = C_m(zI - A_m)^{-1} B_m R(z) + C_m(zI - A_m)^{-1} B_n W(z) \quad (6)$$

Considerando-se na equação (6) o sinal $R(z)$ nulo, verifica-se que a norma \mathcal{H}_∞ pode ser minimizada devido ao projeto inicial do controlador K de $w(k)$ para $y(k)$, implicando na minimização do efeito da perturbação presente na planta ao desempenho da saída do sistema.

Na Figura 1 observa-se a adição do termo $Mr(k)$ na estrutura do estimador, será mostrado na Seção 4 que o vetor M assim como o ganho N tem somente a função de alterar os zeros da função de transferência de $r(k)$ para $u(k)$ e não modificar os pólos estabelecidos no projeto inicial do estimador, pois a função de transferência de $W(z)$ para $Y(z)$ não é modificada por N ou M , vide equações (4) e (6). Os pólos do sistema não são modificados, pois A_m em (4) e (6) não dependem de M ou N . Com isso a convergência do estimador não é comprometida.

Para o projeto do rastreador ótimo, considera-se a relação entre o sinal de erro e o sinal de referência descrito em (7), com o sinal de perturbação $W(z)$ nulo

$$H_m(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = -C_m(zI - A_m)^{-1} B_m + D_m \quad (7)$$

A partir desta relação, pode-se projetar um rastreador de sinais através da modificação de zeros minimizando a norma \mathcal{H}_∞ entre o sinal de referência e o sinal de erro do sistema. O processo de modificação de zeros não interfere no projeto de rejeição de perturbação, pois segundo (6) a função de transferência de $W(z)$ para $Y(z)$ não depende de B_m . Porém, o desempenho do rastreador de sinais depende da alocação de

pólos, pois o controlador K discreto está inserido nas LMIs utilizadas para obter o ótimo do rastreamento. Em (7) utiliza-se a posição dos zeros, implícitos na especificação de N e M em B_m , para o processo de minimização do erro do rastreamento.

3 Projeto de um compensador \mathcal{H}_∞ discreto

O problema de otimização da norma \mathcal{H}_∞ de (A, B_w, B_u, C) ilustrado na Figura 2 consiste em tornar a influência da perturbação $w(k)$ na saída $y(k)$ do sistema a menor possível através do projeto de um controlador discreto K . Portanto, deseja-se minimizar a norma \mathcal{H}_∞ entre a entrada $w(k)$ (perturbação) e a saída $y(k)$. Se as LMIs dadas em (8) forem factíveis o controlador K pode ser obtido a partir do seguinte problema de otimização descrito na forma de LMIs (Palhares et al., 1997):

$$\|H\|_\infty^2 = \min_{\mu} \mu \quad (8)$$

$$s.a \begin{bmatrix} Q & 0 & B_w & AQ - B_u W \\ 0 & I & D & CQ \\ B'_w & D' & \mu I & 0 \\ -W' B'_u + QA' & QC' & 0 & Q \end{bmatrix} > 0$$

$$Q > 0$$

$$\mu > 0$$

sendo $Q = Q'$ e o controlador K é obtido pela expressão: $K = WQ^{-1}$, sendo Q e W soluções ótimas de (8).

Para maior aplicabilidade do método deve-se restringir a região de alocação dos pólos de malha fechada do sistema através do seguinte problema de otimização descrito na forma de LMIs (Chiali and Gahinet, 1996)

$$\begin{bmatrix} -rQ & AQ + qQ - B_u W \\ -W' B'_u + Qq + QA' & -rQ \end{bmatrix} < 0$$

Sendo r e $-q$ o raio e o centro do círculo de restrição de alocação de pólos respectivamente, como é mostrado na Figura 3:

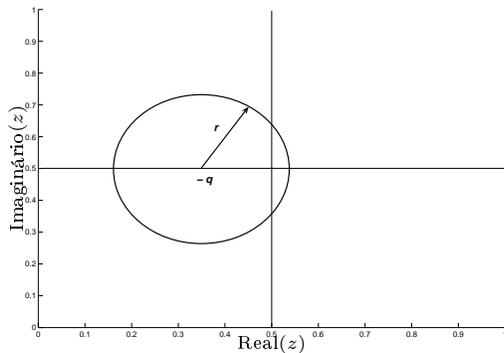


Figure 3: Região de restrição de pólos

No caso do projeto do compensador \mathcal{H}_∞ de $w(k)$ para $y(k)$ é suposta a realimentação de todos os estados. A norma \mathcal{H}_∞ é otimizada, depois, na otimização da norma \mathcal{H}_∞ de $e(k)$ para $r(k)$ projeta-se um estimador (L) para permitir apenas a realimentação da saída.

4 Alocação de zeros em sistemas discretos

Considerando-se o sistema (A, B_u, C) , é possível projetar um sistema que modifique os zeros de $r(k)$ para $u(k)$ conforme mostrado na Figura 4. Neste projeto seleciona-se M e N de modo que os zeros de malha fechada sejam alocados em locais arbitrários escolhidos pelo projetista, sendo $M \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $N \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ (Franklin et al., 1990). O sinal $u_1(k)$ é a saída de controle do regulador.

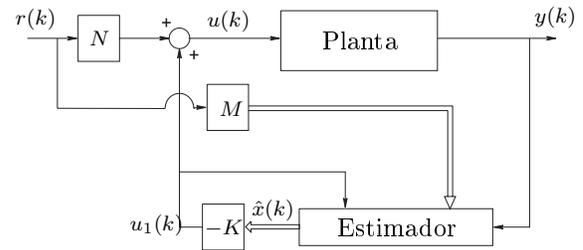


Figure 4: Sistema de alocação de zeros.

O estimador de estados discreto utilizado no sistema de modificação de zeros é um estimador discreto de Kalman obtido a partir da função *kalm* do software MATLAB (Franklin et al., 1990) (Kalman, 1960).

Considerando a Figura 4, se existir um zero de transmissão de $r(k)$ para $u(k)$, então necessariamente existe um zero de transmissão de $r(k)$ para $y(k)$, a menos que ocorra cancelamento de pólos e zeros. Com isso, a equação característica dos zeros de $r(k)$ para $u(k)$ pode ser descrita por (9):

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= (A - BK - LC)\hat{x}(k) + Ly(k) + Mr(k) \\ u(k) &= -K\hat{x}(k) + Nr(k) \end{aligned}$$

$$\det \left[zI - A + B_u K + LC - \frac{M}{N} K \right] = 0 \quad (9)$$

sendo que as soluções, $z = z_i$, são os zeros modificados de $r(k)$ para $u(k)$ (Franklin et al., 1990).

Os parâmetros M e N permitem a modificação dos zeros de $r(k)$ para $u(k)$ e neste trabalho é tratado o caso SISO. Ainda, neste trabalho os zeros são modificados para otimizar a norma \mathcal{H}_∞ do erro de rastreamento.

5 Otimização da norma \mathcal{H}_∞ utilizando modificação de zeros discretos e filtros discretizados

A norma \mathcal{H}_∞ de um sistema dinâmico, linear, invariante no tempo e SISO é uma norma que quantifica o máximo valor singular das magnitudes das frequências deste sistema. A norma \mathcal{H}_∞ do sistema discreto, dinâmico próprio $H(z)$, estável, representado na forma de espaço de estados (A_z, B_z, C_z, D_z) :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_z x(k) + B_z u(k) \\ y(k) &= C_z x(k) + D_z u(k) \end{aligned} \quad (10)$$

sendo $A_z \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_z \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_z \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D_z \in \mathbb{R}^{p \times m}$ supostamente conhecidas, pode ser obtida através do seguinte problema de otimização, descrito na forma de LMIs (Palhares et al., 1997):

$$\|H\|_\infty^2 = \min \quad \mu$$

$$s.a \begin{bmatrix} Q & 0 & B_z & A_z Q \\ 0 & I & D_z & -C_z Q \\ B'_z & D'_z & \mu I & 0 \\ Q A'_z & -Q C'_z & 0 & Q \end{bmatrix} > 0$$

$$Q > 0$$

$$\mu > 0 \quad (11)$$

A matriz de transferência do sistema é dada por $H(z) = C_z(zI - A_z)^{-1}B_z + D_z$.

O problema de otimização de $H_m = (A_m, B_m, -C_m, D_m)$ descrito em (7) consiste em minimizar a norma \mathcal{H}_∞ de $r(k)$ para $e(k)$ do sistema H_m a partir da determinação dos valores de M e N (presentes em B_m , que modificam os zeros), isto é, alocar os zeros de forma que a norma \mathcal{H}_∞ de $r(k)$ para $e(k)$ seja minimizada, formando um rastreador de sinais.

Para a aplicação do projeto do rastreador discreto é necessária a inclusão de um filtro discreto, o qual possibilita também especificar a faixa de frequência na qual ocorrerá o rastreamento do sinal de referência.

Para o projeto do rastreador deseja-se encontrar a solução global que otimize o problema descrito a seguir:

$$\min \|H_m(z)V(z)\|_\infty \quad (13)$$

sendo $V(z) = (A_v, B_v, C_v, D_v)$ um sistema dinâmico projetado para especificar o peso na frequência de saída e considera-se $H_m = (A_m, B_m, -C_m, D_m)$ uma realização do sistema linear invariante no tempo e estável indicado em (7). Na Figura 5 é ilustrada a estrutura de inclusão de peso na frequência:

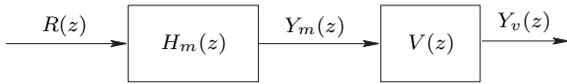


Figure 5: Estrutura de sistemas de controle com peso na frequência.

Pode-se representar o sistema indicado na Figura 5 através de variáveis de estado em função de $x_m(k)$ e $x_v(k)$, através das equações abaixo:

$$\begin{bmatrix} x_m(k+1) \\ x_v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_m & 0 \\ -B_v C_m & A_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m(k) \\ x_v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_m \\ B_v D_m \end{bmatrix} r(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & C_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m(k) \\ x_v(k) \end{bmatrix}$$

Com isso, uma possível realização em espaço de estado de $\tilde{H}_f = H_m(z)V(z)$ é:

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_f & \tilde{B}_f \\ \hline \tilde{C}_f & \tilde{D}_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_m & 0 & B_m \\ -B_v C_m & A_v & B_v D_m \\ \hline 0 & C_v & 0 \end{array} \right] \quad (14)$$

Para o projeto do rastreador com peso na frequência, substitui-se \tilde{A}_f , \tilde{B}_f , \tilde{C}_f e \tilde{D}_f de (14) na equação (11). Isto resulta no problema de otimização descrito em (12), que é equacionado na forma de LMIs. Deste processo determina-se o ganho N e o vetor M , e estes parâmetros minimizam a norma \mathcal{H}_∞ de $r(k)$ para $e(k)$ (rastreador de sinais).

A matriz Q é particionada da seguinte forma $Q_{ij} = Q'_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$.

O vetor N e o ganho M são as soluções ótimas de (12) que minimizam a norma \mathcal{H}_∞ entre o erro e a referência considerando o peso na frequência.

Os filtros utilizados no projeto do rastreador são usados para viabilizar o projeto e ajustar os parâmetros M e N para uma determinada faixa de frequência. Porém na simulação ou implementação do sistema de rastreamento esses filtros são descartados.

6 Exemplo

Considera-se um sistema contínuo linear invariante no tempo de terceira ordem (Dorf and Bishop, 2001), na sua forma discretizada que representa a dinâmica do ângulo de rolamento de um avião a jato de alto desempenho. Projeta-se um rastreador com rejeição à perturbação que está presente em sua estrutura e utiliza-se um período de amostragem de 0,01 segundos para o projeto. Seja o sistema descrito na forma de variáveis de estado dado por:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8681 & -0,2635 & -0,4477 \\ 0,0093 & 0,9987 & -0,0023 \\ 0 & 0,01 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0093 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0,0093 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \quad (15)$$

sendo $x(k)$ o vetor de estado, $u(k)$ o sinal de controle e $w(k)$ é um sinal de distúrbio acrescentado ao sistema.

Como especificação de projeto, o rastreador deve operar em sinais de baixa frequência (até 1 rad/s), então é proposto o filtro $J_1(z)$

$$J_1(z) = \frac{\text{num}(z)}{\text{den}(z)}$$

sendo:

$$\text{num}(z) = 0,0325z^2 + 0,127z + 0,031$$

$$\text{den}(z) = z^3 - 2,9z^2 + 2,805z - 0,905$$

O controlador K discreto que minimiza a norma \mathcal{H}_∞ de $w(k)$ para $y(k)$ do sistema descrito em (15) baseado na estrutura da Figura 2, com centro em 0,2 e raio de 0,6 no plano Z como região de restrição de pólos, tal como o estimador L discreto de Kalman projetados para este sistema discreto são

$$\|H\|_{\infty}^2 = \min_{\mu} \begin{array}{l} \mu \\ \left[\begin{array}{cccc} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 \cdots \\ Q'_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 \cdots \\ Q'_{13} & Q'_{23} & Q_{33} & 0 \cdots \\ 0 & 0 & I & I \cdots \\ N' B'_u & M' & B'_v & I \cdots \\ -Q_{12} A'_2 + Q_{11} A'_1 & Q_{12} A'_4 + Q_{11} A'_3 & Q_{13} A'_v - Q_{11} C' B'_v & -Q_{13} C'_v \cdots \\ -Q_{22} A'_2 + Q'_{12} A'_1 & Q_{22} A'_4 + Q'_{12} A'_3 & Q_{23} A'_v - Q'_{12} C' B'_v & -Q_{23} C'_v \cdots \\ -A'_2 Q_{23} + Q'_{13} A'_1 & Q'_{23} A'_4 + Q'_{13} A'_3 & Q_{33} A'_v - Q_{13} C' B'_v & -Q_{33} C'_v \cdots \\ \cdots B_u N & A_1 Q_{11} - A_2 Q'_{12} & A_1 Q_{12} - A_2 Q_{22} & A_1 Q_{13} - A_2 Q_{23} \\ \cdots M & A_3 Q_{11} + A_4 Q'_{12} & A_3 Q_{12} + A_4 Q_{22} & A_3 Q_{13} + A_4 Q_{23} \\ \cdots B_v & -B_v C Q_{11} + A_v Q'_{13} & -B_v C Q_{12} + A_v Q_{23} & -B_v C Q_{13} + A_v Q_{33} \\ \cdots I & -C_v Q'_{13} & -C_v Q_{23} & -C_v Q_{33} \\ \cdots \mu I & 0 & 0 & 0 \\ \cdots 0 & Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ \cdots 0 & Q'_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ \cdots 0 & Q'_{13} & Q'_{23} & Q_{33} \end{array} \right] > 0 \\ \mu > 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q'_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q'_{13} & Q'_{23} & Q_{33} \end{bmatrix} > 0 \quad (12)$$

$$K = \begin{bmatrix} 0,0015 & 0,1506 & 6,2440 \end{bmatrix} \times 10^5$$

$$L = \begin{bmatrix} 6,2068 \\ 1,2653 \\ 0,0756 \end{bmatrix} \quad (16)$$

A norma H_i de $w(k)$ para $y(k)$ foi de $7,6721 \times 10^{-4}$. O valor calculado implica uma grande atenuação do efeito do sinal de perturbação. A Figura 6 ilustra a resposta em frequência da magnitude da função transferência $Y(z)/W(z)$.

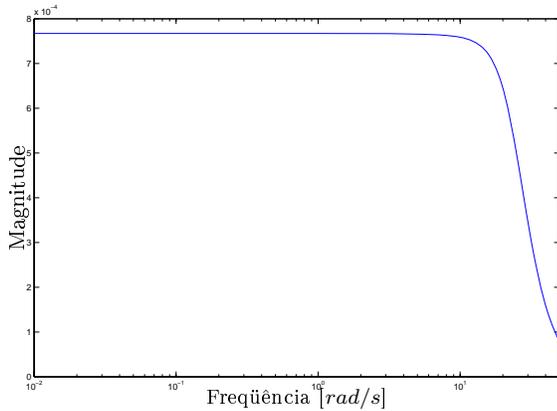


Figure 6: Resposta em frequência de $Y(z)/W(z)$ com o estimador

Na seqüência é projetado o rastreador para baixas frequências de até 1 rad/s minimizando-se a norma \mathcal{H}_{∞} de $r(k)$ para $e(k)$ usando o projeto de rastreamento com modificação de zeros com peso na frequência, conforme descrito em (12).

Na modificação de zeros discretos minimiza-se a norma \mathcal{H}_{∞} de $r(k)$ para $e(k)$ para sinais de baixa frequência (até 1 rad/s), sendo $e(k)$ o erro entre a saída e a entrada, a fim de constituir um seguidor de referência.

O valor da norma \mathcal{H}_{∞} do sistema é $6,7687$ enquanto que o maior valor da magnitude para a faixa de frequência de operação especificada em projeto foi $2,255 \times 10^{-3}$. Isto implica que para a faixa de frequência especificada em projeto, o rastreador opera adequadamente.

A Figura 7 ilustra a resposta em frequência de $E(z)/R(z)$ descrito em (7) e pode-se verificar que a norma \mathcal{H}_{∞} do projeto na faixa de frequência de operação atende às características para um sistema rastreador de sinal e os parâmetros de modificação de zeros obtidos são:

$$M = \begin{bmatrix} 2,5144 \\ 0,0137 \\ 00001 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ e } N = 2,6855 \times 10^5. \quad (17)$$

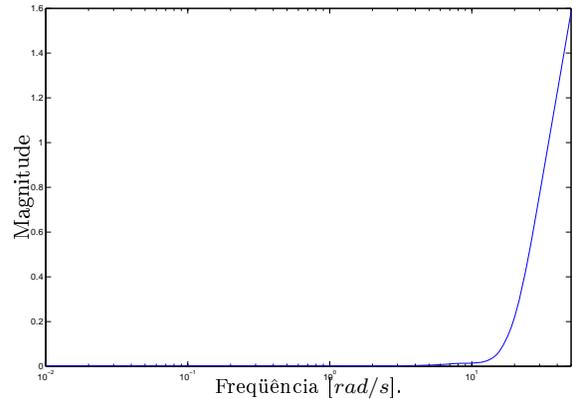


Figure 7: Resposta em frequência da função de transferência $E(z)/R(z)$.

A Figura 7 não ilustra o valor da norma \mathcal{H}_{∞} devido ao teorema de amostragem de Shannon (Isermann, 1989). O teorema de amostragem de Shannon afirma existirem erros no sinal amostrado para sinais de frequência com valor maior do que a metade do valor da

frequência de amostragem. Neste exemplo a frequência de amostragem é de 100rad/s , portanto só são amostrados sinais de frequência de até 50rad/s .

Para simulação considera-se um sinal de entrada $r(kT) = \text{sen}(1kT)$ e um sinal de perturbação $w(k)$ que apresenta amplitudes aleatórias com amplitude máxima igual a 1.

Usando os valores de K , L , M e N obtidos em (16) e (17), tem-se o resultado de simulação ilustrado na Figura 8.

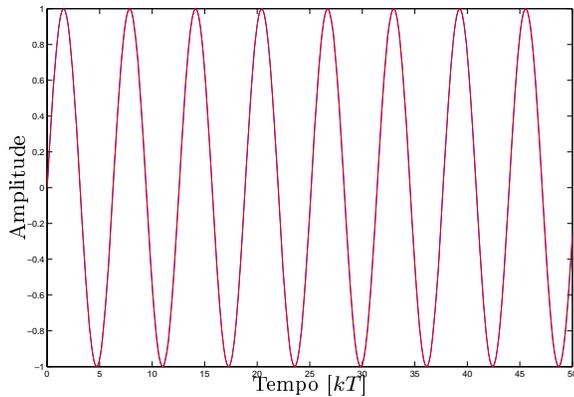


Figure 8: Sinal de referência e sinal de saída praticamente sobrepostos.

No exemplo citado acima foi abordado um rastreador para sinais de baixa frequência, mas a metodologia proposta neste trabalho permite executar projetos para sistemas rastreadores em qualquer outra faixa de frequência.

7 conclusão

Neste artigo é proposta uma metodologia para resolver o problema do rastreador de sinais com rejeição a perturbação em sistemas de controle discreto. Levando em consideração a Figura 1 minimiza-se a norma \mathcal{H}_∞ de $W(z)$ para $Y(z)$ a partir do projeto de um compensador \mathcal{H}_∞ discreto, e reduz-se a norma \mathcal{H}_∞ de $E(z)$ para $R(z)$ a valores de pequena magnitude, constituindo assim um rastreador de sinais de referência.

A rejeição a perturbação é alcançada a partir da alocação de pólos discretos, enquanto que o rastreamento do sinal de referência é feito a partir do projeto de alocação de zeros discretos, estando um processo desacoplado do outro. O projeto do filtro é de extrema importância neste trabalho, pois o mesmo viabiliza a metodologia proposta e determina as frequências que serão mais importantes na construção do rastreador.

Os métodos de projeto são equacionados na forma de LMIs. Assim, este projeto pode ser facilmente realizado utilizando-se algoritmos de convergência polinomial ((Chiali and Gahinet, 1996), (Oliveira, 1999)) disponíveis na literatura.

O método proposto ainda pode ser estendido para plantas com incertezas paramétricas utilizando ainda

técnicas de projeto baseadas em LMIs.

REFERÊNCIAS

- Andrea, C. Q., Assunção, E. and Teixeira, M., C. M. (2004). Controle Ótimo \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ com Modificação de Zeros para o Problema do Rastreamento usando LMI, *Revista Controle e Automação* **14**(4).
- Chiali, M. and Gahinet, P. (1996). \mathcal{H}_∞ Design With Pole Placement Constraints: an LMI Approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-41**: 358–367.
- De la Sen, M. (1996). Pole-placement in Discrete Systems by using Simple and Multirate Sample, *Journal of the Franklin Institute* **333**(5): 721–746.
- Dorf, R. C. and Bishop, R. H. (2001). *Sistemas de Controle Modernos*, LTC Editora, 8 ed., Rio de Janeiro - Brasil.
- Franklin, G. F., Powell, J. D. and Workman, M. (1990). *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison Wesley 2 ed., USA.
- Gahinet, P., Nemirovsk, A., Laub, A. and Chiali, M. (1995). *LMI Control Toolbox User's Guide*, The Mathworks Inc., Natick, MA.
- Isermann, R. (1989). *Digital Control Systems - Fundamentals, Deterministic Control*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, Germany.
- Kalman, R. (1960). New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, *Transactions of ASME - Journal of basic Engineering* **82**: 35–45.
- Messner, W., C. and Kempf, C., J. (1996). Zero Placement for Designing Discrete time Repetitive Controllers, *Control Engineering Practice* **4**(4): 563–569.
- M'Saad, M., Ortega, R. and Landau, I., D. (1985). Adaptive Controllers for Discrete-time Systems with Arbitrary Zeros, *Automatica* **21**(4): 413–423.
- Oliveira, M. C. (1999). *Controle de Sistemas Lineares Baseado nas Desigualdades Matriciais Lineares*, Tese de Doutorado, Unicamp, Campinas, SP.
- Palhares, R., M., Takahashi, R., H. C. and Peres, P., L. D. (1997). \mathcal{H}_∞ and \mathcal{H}_2 Guaranteed Costs Computation for Uncertain Linear Systems, *International Journal of System Science* **28**(2): 183–188.
- Saberi, A., Sannuti, P. and Stoorvogel, A., A. (1997). \mathcal{H}_2 Optimal Controllers with Measurement Feedback for Discrete-time Systems: Flexibility in Closed-loop Pole Placement, *Automatica* **33**(3): 289–304.
- Van Loan, C. (1970). Computing Integrals Involving Matrix Exponential, *IEEE Transactions on automatic control* **23**: 395–404.